Aplicaciones de las derivadas

Ejercicio nº 1.-

Dada la función $f(x)=e^{3x^2-3}$, escribe la ecuación de su recta tangente en el punto de abscisa $x_0=-1$.

Ejercicio nº 2.-

Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\frac{x-2}{x+1}$ en el punto de corte con el eje de absisas.

Ejercicio nº 3.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, que es paralela a la recta $2x + 3y - 1 = 0$.

Ejercicio nº 4.-

Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ que son paralelas a la recta $y = 10x + 2$.

Ejercicio nº 5.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\sqrt{x^2-3x+6}$ en $x_0=-2$.

Ejercicio nº 6.-

Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función:

$$f(x)=\frac{4x-12}{(x-2)^2}$$

Ejercicio nº 7.-

Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$$

Ejercicio nº 8.-

Estudia el crecimiento y la curvatura de la siguiente función. Halla sus máximos, mínimos y puntos de inflexión:

$$f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{9}-x^2+1$$

Ejercicio nº 9.-

Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = (x-2)^2 (x+1)$$

Di dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

Ejercicio nº 10-

Considera la función:

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 1$$

a) Estudia su crecimiento y halla sus máximos y mínimos.

b) Estudia su curvatura y obtén sus puntos de inflexión.

Ejercicio nº 11-

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 1 dm. Hacemos girar el triángulo alrededor de uno de sus catetos. Determina la longitud de los catetos de forma que el cono engendrado de esta forma tenga volumen máximo.

Ejercicio nº 12-

La producción de cierta hortaliza en un invernadero ($Q(x)$ en kg) depende de la temperatura (x en °C) según la expresión: $Q(x) = (x+1)^2 (32 - x)$

a) Calcula razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero.

b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendría?

Ejercicio nº 13-

Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4 000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?

Ejercicio nº 14-

Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos de euro la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 céntimos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cual será ese beneficio?

Ejercicio nº 15-

Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

Soluciones Aplicaciones de las derivadas

Ejercicio nº 1.-

Dada la función $f(x)=e^{3x^2-3}$, escribe la ecuación de su recta tangente en el punto de abscisa $x_0=-1$.

Solución:

- Ordenada en el punto:

$f(-1)=1$

- Pendiente de la recta:

$f'(x)=e^{3x^2-3}\cdot 6x$

$f(-1)=-6$

- Ecuación de la recta tangente:

$y=1-6(x+1) \;\rightarrow\; y=-6x-5$

Ejercicio nº 2.-

Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ en el punto de corte con el eje de absisas.

Solución:

- Punto de corte con el eje X:

$$y=0 \;\rightarrow\; \frac{x-2}{x+1} \;\rightarrow\; x-2=0 \;\rightarrow\; x=2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (2,0)$$

- Pendiente de la recta:

$$y'=\frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+2}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$y'(2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

- Ecuación de la recta tangente:

$$y=\frac{1}{3}(x-2) \;\rightarrow\; y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

Ejercicio nº 3.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, que es paralela a la recta $2x + 3y - 1 = 0$.

Solución:

- Si es paralela a la recta $2x + 3y - 1 = 0 \rightarrow y = \frac{-2x+1}{3}$, tendrá la misma pendiente:

$$y' = \frac{-2}{3}$$

$$f'(x) = 4x - 3 = \frac{-2}{3} \rightarrow 4x = \frac{7}{3} \rightarrow x = \frac{7}{12}$$

- Ordenada en el punto:

$$f\left(\frac{7}{12}\right) = \frac{-5}{72}$$

- Ecuación de la recta tangente:

$$y = \frac{-5}{72} - \frac{2}{3}\left(x - \frac{7}{12}\right) \rightarrow y = \frac{-2}{3}x + \frac{23}{72}$$

Ejercicio nº 4.-

Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ que son paralelas a la recta $y = 10x + 2$.

Solución:

- Si son paralelas a la recta $y = 10x + 2$, tienen la misma pendiente; es decir, ha de ser:

$$f'(x) = 10$$

$$f'(x) = 12x^2 - 2 = 10 \rightarrow 12x^2 = 12 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

- Ordenadas en los puntos:

$f(-1) = -1$; $f(1) = 3$

- Ecuaciones de las rectas tangentes:

– En $x = -1 \rightarrow y = -1 + 10(x + 1) \rightarrow y = 10x + 9$

– En $x = 1 \rightarrow y = 3 + 10(x - 1) \rightarrow y = 10x - 7$

Ejercicio nº 5.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x^2 - 3x + 6}$ en $x_0 = -2$.

Solución:

- Ordenada en el punto:

$$y(-2) = \sqrt{16} = 4$$

- Pendiente de la recta:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3x + 6}} \cdot (2x - 3) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 6}}$$

$$y'(-2) = \frac{-7}{8}$$

- Ecuación de la recta:

$$y = 4 - \frac{7}{8}(x + 2) \quad \rightarrow \quad y = \frac{-7}{8}x + \frac{9}{4}$$

Ejercicio nº 6.-

Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}}$$

Solución:

- *Dominio* $= \mathbb{R} - \{ 2 \}$
- Derivada:

$$f'(x) = \frac{4(x-2)^2 - (4x - 12) \cdot 2(x - 2)}{(x - 2)^4} = \frac{(x - 2)\,[4(x - 2) - 2(4x - 12)]}{(x - 2)^4} =$$

$$= \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x - 2)^3} = \frac{-4x + 16}{(x - 2)^3}$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -4x + 16 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 4$

- Signo de $f'(x)$:

$f' < 0$		$f' > 0$		$f' < 0$
$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$; es decreciente en $(2, 4)$. Tiene un máximo en $(4, 1)$.

Ejercicio nº 7.-

Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}}$$

Solución:

- Dominio = ***R*** – {1}
- Derivada:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)\,(x-1)-\left(x^2-2x+2\right)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x-2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \;\;\rightarrow\;\; x^2-2x=0 \;\;\rightarrow\;\; x(x-2)=0\;\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

- Signo de *f'* (*x*).

$f'>0$		$f'<0$		$f'<0$		$f'>0$
$\nearrow$	0	$\searrow$	1	$\searrow$	2	$\nearrow$

f (*x*) es creciente en (–∞, 0) ∪ (2, +∞); es decreciente en (0, 1) ∪ (1, 2). Tiene un máximo en (0, –2) y un mínimo en (2, 2).

<u>Ejercicio nº 8.-</u>

Estudia el crecimiento y la curvatura de la siguiente función. Halla sus máximos, mínimos y puntos de inflexión:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{9}-x^2+1}$$

Solución:

- Derivada:

$$f'(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{3}-2x$$

$$f'(x)=0 \;\;\rightarrow\;\; \frac{x^3-x^2-6x}{3}=\frac{x\left(x^2-x-6\right)}{3}=0\;\begin{cases}x=0\\[2ex] x^2-x-6=0 \;\;\rightarrow\;\; x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0\\x=3\end{cases}$$

- Signo de *f'* (*x*):

$f'<0$		$f'>0$		$f'<0$		$f'>0$
$\searrow$	–2	$\nearrow$	0	$\searrow$	3	$\nearrow$

f (*x*) es decreciente en (–∞, –2) ∪ (0, 3); es creciente en (–2, 0) ∪ (3, +∞). Tiene un mínimo en $\left(-2,\ \dfrac{-7}{9}\right)$ y otro en $\left(3,\ \dfrac{-17}{4}\right)$. Tiene un máximo en $(0,\ 1)$.

- Segunda derivada:

$$f''(x) = x^2 - \frac{2x}{3} - 2$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 2x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+72}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx -1{,}12 \\ x \approx 1{,}79 \end{cases}$$

- Signo de $f''(x)$:

$f''>0$		$f''<0$		$f''>0$
$\cup$	$-1{,}12$	$\cap$	$1{,}79$	$\cup$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty; -1{,}12) \cup (1{,}79; +\infty)$; es convexa en $(-1{,}12; 1{,}79)$. Tiene dos puntos de inflexión:

$(-1{,}12; 0{,}03)$ y $(1{,}79, -1{,}99)$

<u>Ejercicio nº 9.-</u>

Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = (x-2)^2 (x+1)}$$

Di dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

Solución:

- Derivada:

$f'(x) = 2(x-2)(x+1) + (x-2)^2 = (x-2)[2(x+1) + x - 2] =$

$= (x-2)(2x + 2 + x - 2) = 3x(x-2) = 3x^2 - 6x$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x(x-2) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- Signo de $f'(x)$:

$f'>0$		$f'<0$		$f'>0$
$\nearrow$	0	$\searrow$	2	$\nearrow$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$; es decreciente en $(0, 2)$. Tiene un máximo en $(0, 4)$ y un mínimo en $(2, 0)$.

- Segunda derivada:

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 1$

- Signo de $f''(x)$:

$f''<0$		$f''>0$
$\cap$	1	$\cup$

$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 1)$; es cóncava en $(1, +\infty)$. Tiene un punto de inflexión en $(1, 2)$.

Ejercicio nº 10-

Considera la función:

$$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 1}$$

a) Estudia su crecimiento y halla sus máximos y mínimos.

b) Estudia su curvatura y obtén sus puntos de inflexión.

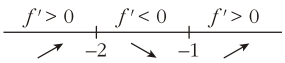
Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 + 18x + 12$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 6\,(x^2 + 3x + 2) = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

- Signo de $f'(x)$:

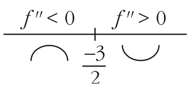


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$; es decreciente en $(-2, -1)$. Tiene un máximo en $(-2, -3)$ y un mínimo en $(-1, -4)$.

b) $f''(x) = 12x + 18$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 12x + 18 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-18}{12} = \frac{-3}{2}$$

- Signo de $f''(x)$:



$f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, \dfrac{-3}{2}\right)$; es cóncava en $\left(\dfrac{-3}{2}, +\infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $\left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{-7}{2}\right)$.

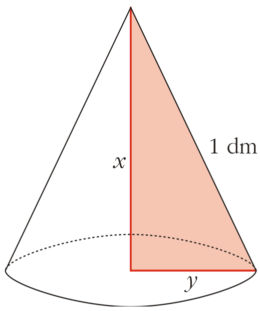
Ejercicio nº 11-

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 1 dm. Hacemos girar el triángulo alrededor de uno de sus catetos. Determina la longitud de los catetos de forma que el cono engendrado de esta forma tenga volumen máximo.

Solución:

Si llamamos x e y a las longitudes de cada uno de los catetos, sabemos que:

$$x^2 + y^2 = 1 \;\rightarrow\; y^2 = 1 - x^2$$



El volumen del cono es:

$$V = \frac{\pi}{3}\,y^2 x = \frac{\pi}{3}\left(1 - x^2\right)x = \frac{\pi}{3}\left(x - x^3\right);\; 0 \le x \le 1$$

Buscamos x para que el volumen sea máximo:

$$V' = \frac{\pi}{3}\left(1 - 3x^2\right)$$

$$V' = 0 \;\rightarrow\; 1 - 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{1}{3} \;\rightarrow\; x = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{(la raíz negativa no vale)}$$

Veamos que es un máximo:

$$V'' = \frac{\pi}{3}\left(-6x\right), \quad V''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) < 0 \;\rightarrow\; \text{en } x = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ hay un máximo } \left(V(0) = V(1) = 0\right)$$

Por tanto, el máximo se alcanza cuando los catetos miden:

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58 \text{ dm} \quad \text{(el que será la altura del cono)}$$

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}82 \text{ dm}$$

<u>Ejercicio nº 12-</u>

La producción de cierta hortaliza en un invernadero ($Q(x)$ en kg) depende de la temperatura (x en °C) según la expresión: $Q(x) = (x + 1)^2 (32 - x)$

a) Calcula razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero.

b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendría?

Solución:

a) Buscamos el máximo de la función $Q(x)$:

$$Q'(x) = 2(x + 1)(32 - x) + (x + 1)^2 \cdot (-1) = (x + 1)[2(32 - x) - (x + 1)] =$$

$$= (x + 1)[64 - 2x - x - 1] = (x + 1)(63 - 3x)$$

$$Q'(x) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \\ 63 - 3x = 0 \;\rightarrow\; x = 21 \end{cases}$$

$Q''(x) = (63 - 3x) + (x + 1) \cdot (-3) = 63 - 3x - 3x - 3 = -6x + 60$

$Q''(-1) = 66 > 0 \;\rightarrow\;$ en $x = -1$ hay un mínimo.

$Q''(21) = -66 < 0 \;\rightarrow\;$ en $x = 21$ hay un mínimo.

Por tanto, la temperatura ha de ser de 21 °C.

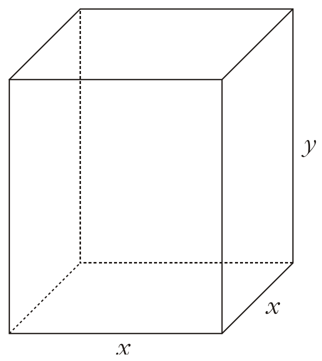
b) La producción en este caso sería de:

$Q(21) = 5\,324$ kg

__Ejercicio nº 13-__

Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4 000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?

Solución:



Llamamos x al lado de la base e y a la altura del depósito. Así, el volumen es:

$$V = x^2 y = 4000\,\text{dm}^3 \quad \to \quad y = \frac{4000}{x^2}$$

La superficie total del depósito (recordemos que está abierto) será:

$$A = 4xy + x^2 = 4x \cdot \frac{4000}{x^2} + x^2 = \frac{16000}{x} + x^2; \quad x > 0$$

Buscamos x para que A sea mínima:

$$A' = \frac{-16000}{x^2} + 2x = \frac{-16000 + 2x^3}{x^2}$$

$$A' = 0 \quad \to \quad -16\,000 + 2x^3 = 0 \quad \to \quad 2x^3 = 16\,000 \quad \to$$

$$\to \quad x^3 = \frac{16000}{2} = 8000 \quad \to \quad x = \sqrt[3]{8000} = 20\text{ dm}$$

Veamos que es un mínimo:

$$A'' = \frac{32000}{x^3} + 2, \quad A''(20) > 0 \quad \to \quad \text{en } x = 20 \text{ hay mínimo}$$

Por tanto, el lado de la base debe medir $x = 20$ dm y la altura, $y = 10$ dm.

__Ejercicio nº 14-__

Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos de euro la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 céntimos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cual será ese beneficio?

Solución:

Llamamos x al número de céntimos en los que aumenta el precio. Así, cada helado costará $50 + x$ céntimos; y venderá $200 - 2x$ helados diarios.

Por tanto, por la venta de los helados obtendrá unos ingresos:

$I\ (x) = (50 + x)\ (200 - 2x)$

Pero tiene unos gastos de: $G\ (x) = (200 - 2x) \cdot 40$

Luego, el beneficio será de:

$B\ (x) = I\ (x) - G\ (x) = (50 + x)\ (200 - 2x) - (200 - 2x) \cdot 40 = (200 - 2x)\ (50 + x - 40) =$

$= (200 - 2x)\ (x + 10) = -2x^2 + 180x + 2\,000$

Hallamos x para que el beneficio sea máximo:

$B'(x) = -4x + 180$

$B'(x) = 0 \ \rightarrow\ -4x + 180 = 0 \ \rightarrow\ x = 45$

$B''(x) = -4;\ \ B''(45) < 0 \ \rightarrow$ en $x = 45$ hay un máximo

Por tanto, obtendrá el máximo beneficio vendiendo cada helado a $50 + 45$ céntimos de euro. En este caso, el beneficio sería de $B\ (45) = 6\,050$ céntimos, es decir, de 60,50 euros.

<u>Ejercicio nº 15-</u>

Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

Solución:

Llamamos x al número de árboles que se plantan. Tenemos que el número de frutos sería:

$f\ (x) = (24 + x)\ (600 - 15x) = -15x^2 + 240x + 14\,400$

Buscamos x para que $f\ (x)$ sea máxima:

$f'\ (x) = -30x + 240$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ -30x + 240 = 0 \ \rightarrow\ x = \frac{240}{30} = 8 \ \rightarrow\ x = 8$$

Veamos que es un máximo:

$f''\ (x) = -30$; $f''\ (8) = -30 < 0 \ \rightarrow$ en $x = 8$ hay máximo. (Como $f\ (x)$ corresponde a una parábola invertida, en $x = 8$ está el máximo absoluto).

Por tanto, se deben plantar 8 árboles. Así, habrá un total de $24 + 8 = 32$ árboles, que producirán $15\,360$ frutos.